

SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA

CONCORSO DI AMMISSIONE AL I ANNO
DEI CORSI ORDINARI DI PRIMO LIVELLO
E A CICLO UNICO A.A. 2025-2026

CLASSE DELLE SCIENZE SPERIMENTALI
Soluzioni della PROVA DI MATEMATICA E LOGICA
(Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

1. Sia Alice che Beatrice che Carlo hanno visitato 14 delle 20 regioni italiane. Dimostrare che c'è una regione che è stata visitata da tutti e tre.

Soluzione. Se contiamo il numero di persone (tra Alice, Beatrice e Carlo) che hanno visitato ciascuna regione, otteniamo un numero totale di visite pari a $14 \cdot 3 = 42$. Se nessuna regione fosse stata visitata da tutti e tre, allora ogni regione sarebbe stata visitata al massimo da due persone. Quindi il numero totale di visite sarebbe al massimo $20 \cdot 2 = 40$. Ci sono quindi almeno due regioni che sono state visitate da tutti e tre. \square

2. Dimostrare che esiste una unica coppia di interi non negativi x, y tali che

$$\frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} = 2025.$$

Soluzione. Facciamo un cambio di variabile ponendo $s = x + y$ (da cui $y = s - x$) osservando che alle coppie (x, y) di interi non negativi corrispondono le coppie (x, s) di interi con $0 \leq x \leq s$. L'equazione diventa

$$\frac{s^2 + s}{2} + x = 2025.$$

Osserviamo che incrementando x con s fissato la funzione

$$g(x, s) = \frac{s^2 + s}{2} + x$$

viene incrementata di 1. Dunque a s fissato la funzione $g(x, s)$ assume tutti i valori interi compresi tra $g(0, s)$ e $g(s, s)$. Ma si può anche osservare che

$$g(0, s + 1) = g(s, s) + 1$$

cioè il valore minimo assunto per $x + y = s + 1$ è esattamente di uno più grande del valore massimo assunto per $x + y = s$.

In buona sostanza la funzione $g(x, s)$ assume tutti i valori interi non negativi una ed una sola volta. In particolare c'è una unica coppia (x, s) di

interi $0 \leq x \leq s$ tali che $g(x, s) = 2025$ e quindi c'è una unica coppia di interi non negativi (x, y) che risolvono l'equazione data.

In effetti quello che abbiamo osservato è che la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^2 + 3x + y}{2}$$

è una biezione $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Facendo qualche calcolo (non richiesto dall'esercizio) è anche possibile trovare esplicitamente la soluzione dell'equazione. Il valore di s è il più grande intero per cui $g(0, s) \leq 2025$ ovvero $\frac{s^2+s}{2} \leq 2025$. Visto che 2025 è vicino a $2^{11} = 2048$ e $s^2 + s$ è compreso tra s^2 e $(s + 1)^2$ si può ipotizzare che s debba essere inferiore a $2^6 = 64$. Se $s = 2^6$ si ha $g(0, s) = \frac{4096+64}{2} = 2080 > 2025$, dunque prendiamo $s = 63$ e osserviamo che, usando le proprietà già enunciate,

$$\begin{aligned} g(x, 63) &= g(0, 63) + x = g(63, 63) - 63 + x \\ &= g(0, 64) - 64 + x = 2080 - 64 + x = 2016 + x \end{aligned}$$

dovremo scegliere $x = 2025 - 2016 = 9$. Dunque $x = 9$ e $y = s - x = 63 - 9 = 54$. \square

3. In un gioco d'azzardo si lanciano 5 dadi. Per ogni 6 uscito si vincono 9 soldi, per ogni altro numero si perdono 2 soldi. Ad esempio se esce 6,1,6,3,1 si guadagnano 12 soldi, se esce 5,1,4,4,2 si perdono 10 soldi. E' un gioco conveniente? Mostrare che in una singola giocata la probabilità di guadagnare è più grande della probabilità di perdere.

Soluzione. La vincita attesa nel lancio di un singolo dado è la media delle vincite, pesata con la rispettiva probabilità dunque è

$$\frac{1}{6} \cdot 9 + \frac{5}{6} \cdot (-2) = -\frac{1}{6}.$$

Se lanciamo contemporaneamente 5 dadi, la vincita attesa è 5 volte la vincita attesa di un singolo dado, ed è quindi $-\frac{5}{6}$. Significa che il gioco non è conveniente perché dopo n giocate si perdono in media $\frac{5}{6}n$ soldi.

D'altra parte se in un lancio di 5 dadi esce anche solo un dado con il punteggio 6, si guadagnano almeno $9 - 4 \cdot 2 = 1$ soldi. Dunque la probabilità di perdere, in una singola giocata, è uguale alla probabilità di non ottenere alcun 6. Questa probabilità è

$$p = \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

Ci viene chiesto di mostrare che $p < 1 - p$. Si ha

$$1 - p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{6^5 - 5^5}{6^5}.$$

Se non abbiamo una calcolatrice a disposizione possiamo usare lo sviluppo del binomio per osservare che

$$6^5 = (5 + 1)^5 > 5^5 + 5 \cdot 5^4 = 2 \cdot 5^5$$

da cui si ottiene, come volevamo dimostrare,

$$1 - p = \frac{6^5 - 5^5}{6^5} > \frac{5^5}{6^5} = p.$$

□

4. Sappiamo che $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ sono numeri irrazionali (significa che non si possono esprimere come rapporto di numeri interi). Mostrare che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è irrazionale.

Soluzione. Osserviamo che

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$$

e dunque

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

Questo significa che se $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ fosse razionale, anche $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ sarebbe razionale. Ma allora anche la loro media sarebbe razionale:

$$\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{3}.$$

Sapendo che $\sqrt{3}$ è irrazionale possiamo dunque concludere che $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ non può essere razionale. □

5. Dato un insieme di tre numeri distinti $A = \{a, b, c\}$, consideriamo l'insieme $A' = \{\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\}$ formato dalle loro medie aritmetiche. Partendo dall'insieme $A_0 = \{1, 2, 4\}$ si itera questo procedimento indefinitamente ottenendo gli insiemi $A_1 = A'_0 = \{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\}$, $A_2 = (A_1)'$, $A_3 = (A_2)'$, ...

Mostrare che scelto un qualunque elemento $a_n \in A_n$ si ha $a_n \rightarrow \frac{7}{3}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Soluzione. Osserviamo che se $A = \{a, b, c\}$ con $a < b < c$, allora $A' = \{\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\}$ con $\frac{a+b}{2} < \frac{a+c}{2} < \frac{b+c}{2}$. Dunque tutti gli insiemi A_n hanno 3 elementi.

Innanzitutto osserviamo nel passaggio da A ad A' la media dei tre elementi non cambia:

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2}}{3} = \frac{a + b + c}{3}.$$

In secondo luogo osserviamo che la differenza tra il massimo e il minimo dei tre elementi si dimezza:

$$\frac{b+c}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{c-a}{2}.$$

Nel caso specifico $A_0 = \{1, 2, 4\}$ la media è $\frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3}$ e la differenza tra massimo e minimo è $4 - 1 = 3$. Dunque scelto comunque $a_n \in A_n$ sappiamo che

$$|a_n - \frac{7}{3}| \leq \frac{3}{2^n} \rightarrow 0.$$

□

6. Si consideri una quadrettatura del piano cartesiano formata da quadratini di lato 1 (cioè l'unione delle rette orizzontali $y = k$ e verticali $x = h$ con h, k numeri interi). Si consideri il cerchio pieno (disco) C_n di centro l'origine e raggio n con n intero positivo. Sia ℓ_n la lunghezza totale della quadrettatura all'interno di C_n . Verificare che $\ell_1 = 4$ e $\ell_2 = 8 + 8\sqrt{3}$. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell_n}{n^2}.$$

Soluzione. Osserviamo che se un quadretto è contenuto in C_n i suoi quattro lati contribuiscono alla lunghezza totale ℓ_n . Facciamo però attenzione al fatto che ogni lato è condiviso da due quadratini adiacenti quindi i quadretti che sono lontani dalla circonferenza di C_n contribuiscono con 2 unità di lunghezza ad ℓ_n mentre i quadratini vicini alla circonferenza contribuiscono con meno di 2 unità di lunghezza. Considerando che per $n \rightarrow +\infty$ il numero di quadretti interni deve essere approssimativamente pari all'area del cerchio (in quanto ogni quadretto ha area unitaria) cioè πn^2 , mentre i quadratini vicini alla circonferenza sono approssimativamente proporzionali a $2\pi n$, ci aspettiamo di ottenere

$$\frac{\ell_n}{n^2} \approx \frac{2\pi n^2 \pm Cn}{n^2} \rightarrow 2\pi.$$

Per avere una dimostrazione formale di quanto appena detto possiamo cercare di costruire delle approssimazioni per eccesso e per difetto della lunghezza ℓ_n .

Per approssimare per difetto possiamo osservare che tutti i quadratini che toccano la circonferenza C_{n-2} sono completamente contenuti in C_n in quanto se un punto del quadratino è a distanza $n-2$ dall'origine tutti gli altri punti distano al massimo $\sqrt{2} < 2$ da tale punto e quindi per disuguaglianza triangolare distano meno di n dall'origine. Il numero di tali quadratini è superiore all'area del cerchio C_{n-2} cioè è superiore a $\pi(n-2)^2$. Ognuno di questi quadratini contribuisce con 2 unità alla lunghezza ℓ_n e dunque

$$\ell_n \geq 2 \cdot \pi(n-2)^2.$$

Per avere una approssimazione dall'alto possiamo osservare che se prendiamo tutti i quadratini strettamente contenuti in C_{n+2} e prendiamo tutti i loro lati inferiori e i loro lati sinistri, si ottengono dei segmenti che ricoprono certamente tutta la quadrettatura all'interno di C_n . Infatti se un lato di un quadretto che ha almeno un punto interno a C_n è il lato destro o il lato superiore di un quadretto che tocca C_n e che quindi è contenuto in C_{n+2} per quanto già osservato nel caso precedente. Si ottiene quindi

$$\ell_n \leq 2 \cdot \pi(n+2)^2.$$

Dunque abbiamo:

$$\frac{2\pi(n-2)^2}{n^2} \leq \frac{\ell_n}{n^2} \leq \frac{2\pi(n+2)^2}{n^2}$$

ovvero

$$2\pi \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2}\right) \leq \frac{\ell_n}{n^2} \leq 2\pi \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2}\right).$$

e osservando che il primo e l'ultimo membro tendono entrambi a 2π , per confronto (teorema dei due carabinieri) anche il termine centrale tende a 2π . \square